ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 25.11.23

Уважаемые студенты! На практике часто приходится встречаться с определёнными интегралами, значения которых нельзя вычислить точно.Возникает необходимость приближённого вычисления определённых интегралов или численного интегрирования. Методы численного интегрирования применяются и в тех случаях, когда вычисление интегралов является слишком громоздким и при решении задач, содержащих функции, заданные таблично.

Новый материал (сделать краткий конспект в рабочую тетрадь!!!)

Тема «Формулы прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона»

Теоретические сведения

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции.

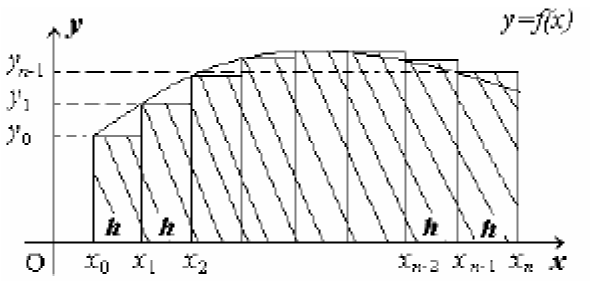
Рассмотрим некоторые методы вычисления определенных интегралов.

Метод прямоугольников

Пусть требуется найти площадь криволинейной трапеции:

$$s = \int_a^b f(x)dx$$

Для этого отрезок [a; b] разобьем на n равных отрезков точками: $a=x_0, x_1, \ldots, x_n= b$.



На каждом получившемся отрезке можно вычислить площадь прямоугольника. И так на отрезке $[x_0; x_1]$ $f(x)\approx\varphi_0(x)\approx y_0$, а площадь

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} y_0 dx = y_0 x|_{x_0}^{x_1} = y_0(x_1 - x_0) = hy \text{ , и т.д.}$$

Суммируя площади S_1, $S_{2,}$…, S_n, получим приближенно площадь всей фигуры, а следовательно и значение определенного интеграла во всему отрезку [a; b]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx hy_0 + hy_1 + \cdots + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}),$$

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$. (1) *–формула прямоугольников с недостатком;*

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_n)$ (2) *–формула прямоугольников с избытком.*

Ошибка, получаемая при вычислении определенного интеграла по формуле прямоугольников, будет тем меньше, чем больше число n, т.е. чем меньше шаг h. Формула дает точное значение, если подынтегральная функция f(x) является многочленом нулевой степени, т.е. постоянна.

Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулами: $\Delta = \left|A_{\text{точн}} - A_{\text{прибл}}\right|$ – абсолютная погрешность;

$\delta = \frac{\Delta}{|A_{\text{точн}}|} \cdot 100\%$- относительная погрешность.

Пример. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2 dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

Разобьём отрезок [a,b] на несколько (например, на 6) равных частей.

Тогда a = 2, b = 5 ,$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$- шаг разбиения, $x_k = a + k \cdot \Delta x$ - узлы разбиения.

$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2.;$ $f(x_0) = 2^2 = 4$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5;$ $f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$

$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3;$ $f(x_2) = 3^2 = 9$

$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}5;$ $f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$

$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4;$ $f(x_4) = 4^2 = 16$

$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5.$ $f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25.$

Результаты вычислений для удобства представляем в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4	5
x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

По формуле (1):

$$\int_0^3 x^2dx \approx \frac{1}{2}(4+6{,}25+9+12{,}25+16+20{,}25) = \frac{1}{2}\cdot 67{,}75 = 33{,}875$$

Для того чтобы вычислить относительную погрешность вычислений по формуле Ньютона-Лейбница находим точное значение интеграла:

$$\int_0^3 x^2dx = \left.\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$$

Вычислим погрешность: $\Delta = |39 - 33{,}875| = 5{,}125$,

$$\delta = \frac{5{,}125}{39}\cdot 100\% \approx 13{,}14\%$$

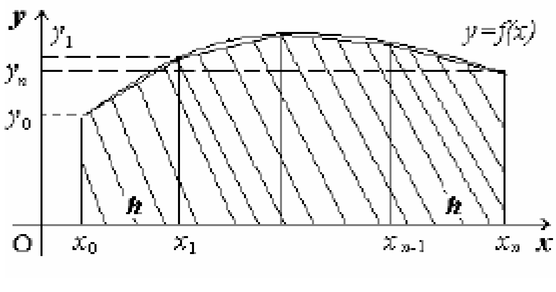
Метод трапеций

Пусть требуется найти площадь криволинейной трапеции:

$$s = \int_a^b f(x)dx$$

Для этого отрезок [a; b] разобьем на n равных отрезков точками: $a=x_0, x_1, \ldots, x_n= b$.

На каждом отрезке разбиения функцию f(x) заменим интерполяционным многочленом Ньютона первой степени, т.е. кривая y=f(x) на каждом участке заменяется прямой, проходящей через две точки. В этом случае площадь элементарной трапеции на отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ заменяется площадью прямоугольной трапеции



Площадь криволинейной трапеции на отрезке $[x_0;\ x_1]$:

$f(x) \approx \varphi_i(x) \approx y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$;

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} \left(y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)\right) dx = y_0 x|_{x_0}^{x_1} + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2}\Bigg|_{x_0}^{x_1}$$
$$= \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Аналогично находим площади на других отрезках. Суммируя эти площади получим:

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[\mathrm{y}_0 + \mathrm{y}_n + 2(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 + \cdots + \mathrm{y}_{n-1})]$,

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[\mathrm{y}_0 + \mathrm{y}_n + 2(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 + \cdots + \mathrm{y}_{n-1})]$ (3)- *формула трапеций.*
Она дает хороший результат при большом n.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_0^5 \frac{7}{x^2+1}dx$ методом трапеций для n=10. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение: при разбиении отрезка на 10 равных частей получаем $a = 0$, $b = 5$,$\mathrm{h} = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{10} = \frac{1}{2}$- шаг разбиения, $x_k = a + k \cdot \mathrm{h}$ - узлы разбиения.

$x_0 = 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.;$	$f(x_0) = \frac{7}{0^2+1} = 7$
$x_1 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5;$	$f(x_1) = \frac{7}{0{,}5^2+1} = 5{,}6$
$x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$	$f(x_2) = \frac{7}{1^2+1} = 3{,}5$
$x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5;$	$f(x_3) = \frac{7}{1{,}5^2+1} \approx 2{,}1538$
$x_4 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2;$	$f(x_4) = \frac{7}{2^2+1} = 1{,}4$
$x_5 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5;$	$f(x_5) = \frac{7}{2{,}5^2+1} \approx 0{,}9655$
$x_6 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 3;$	$f(x_6) = \frac{7}{3^2+1} = 0{,}7$
$x_7 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}5;$	$f(x_7) = \frac{7}{3{,}5^2+1} \approx 0{,}5283$
$x_8 = 0 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 4;$	$f(x_8) = \frac{7}{4^2+1} \approx 0{,}4117$
$x_9 = 0 + 9 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5;$	$f(x_9) = \frac{7}{4{,}5^2+1} \approx 0{,}3294$
$x_{10} = 0 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 5;$	$f(x_{10}) = \frac{7}{5^2+1} \approx 0{,}2692$

Результаты вычислений для удобства представляем в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	7	5,6	3,5	2,1538	1,4	0,9655	0,7	0,5283	0,4117	0,3294	0,2692

По формуле (3):

$\int_0^5 \frac{7dx}{x^2+1} \approx \frac{0,5}{2}[7 + 0,2692 + 2(5,6 + 3,5 + 2,1538 + 1,4 + 0,9655 + 0,7 +$
$+0,5283 + 0,4117 + 0,3294)] = 9,6117.$

Для того чтобы вычислить относительную погрешность вычислений по формуле Ньютона-Лейбница находим точное значение интеграла:

$$\int_0^5 \frac{7dx}{x^2+1} = 7\int_0^5 \frac{dx}{x^2+1} = 7arctgx|_0^5 = 7arctg5 \approx 7 \cdot 1,3734 = 9,6138$$

Вычислим погрешность: $\Delta = |9,6138 - 9,6117| = 0,0021,$

$$\delta = \frac{0,0021}{9,6138} \cdot 100\% \approx 0,021\%$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru